Semaine 10a 2024

Poutres statiquement indéterminées 2/2

PARTIE 1:

Energie de déformation

(Chapitre 9.8 + 9.10 de Gere et Goodno)

Semaine 10a

Objectifs d’apprentissage au sujet de l’énergie de déformation

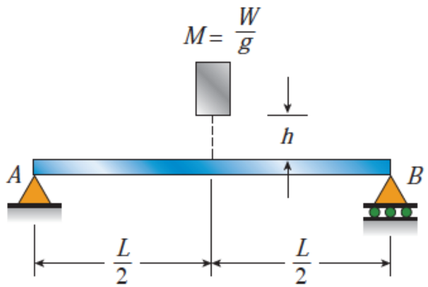
- Comprendre que l’énergie de déformation est toujours positive
- Calculer l’énergie de déformation de poutre avec des charges
- Calculer Déflection sous impacte par l’énergie

Energie de déformation (*strain energy*)

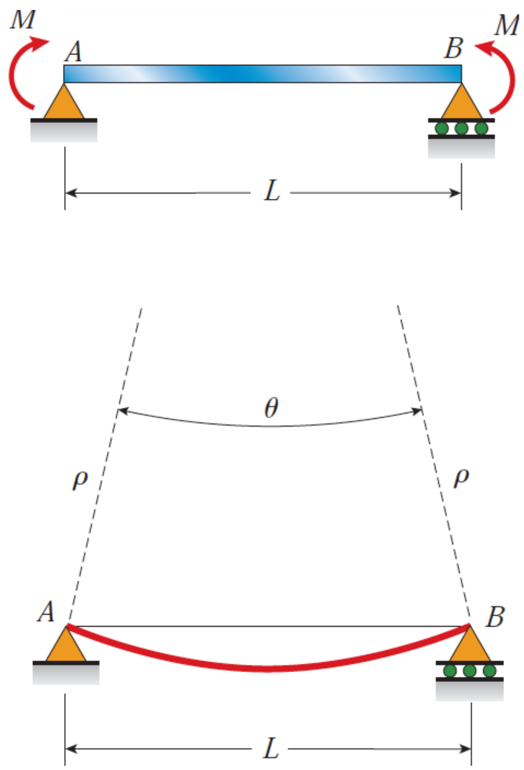
- Le travail fait par une force externe est stocké sous forme d'énergie élastique
- On peut résoudre certains problèmes liants force à déplacement (F-d, M-θ) en passant par l'énergie de déformation (par exemple déplacement du à un impact)
- C'est un pas vers une méthode de résolution plus complète, passant par l'énergie: *le théorème de Castigliano*. La dérivée de l'énergie U par rapport à la force P_i donne le déplacement d_i

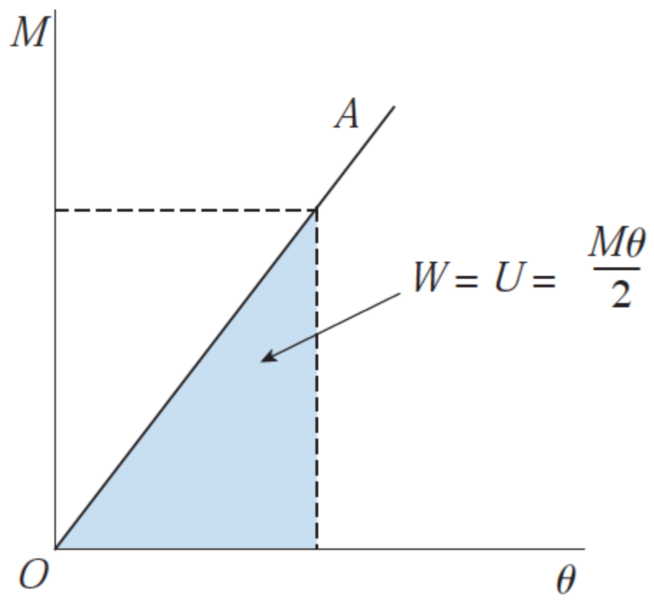
$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

(*Castigliano* pas à l'examen!)



Energie de déformation pour une poutre en flexion pure





$$\theta = \frac{L}{\rho} = \frac{ML}{EI}$$

$$W = U = \frac{M\theta}{2}$$

$$U = \frac{M^2 L}{2EI} \qquad U = \frac{EI\theta^2}{2L}$$

U est toujours positif

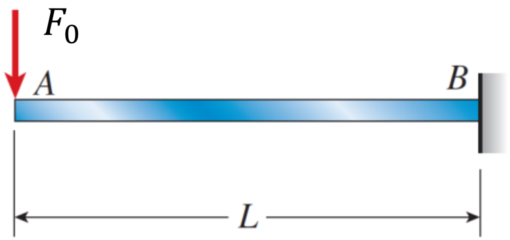
Et plus généralement
(on le calculera dans 2 slides)

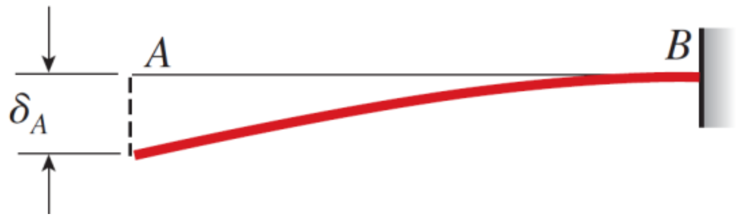
$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad U = \int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx$$

Energie de déformation (travail) pour les poutres

Force ou Moment ponctuels

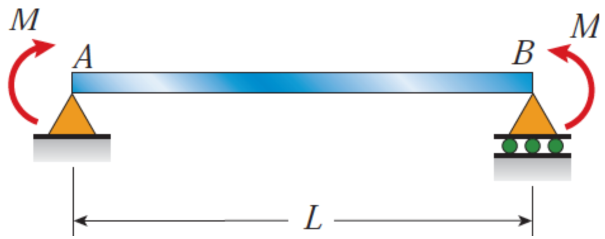
- Force F_0 crée un déplacement δ au point d'application:

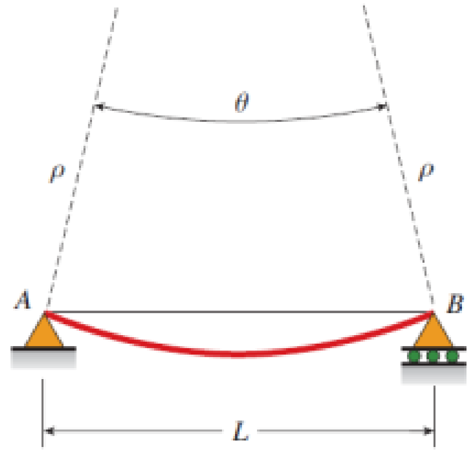




$$U_{F_0} = \frac{1}{2} F_0 \delta$$

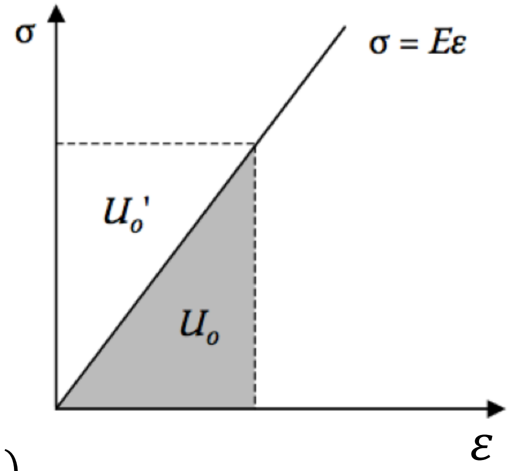
- Moment M_0, crée un angle θ





$$U_M = \frac{1}{2} M_0 \theta$$

Energie de déformation pour les poutres



- La *densité* d'énergie u_0 de déformation relative est la surface sous la courbe ε–σ. On intègre sur le volume de la poutre pour trouver l'énergie de déformation.
- déjà vu pour des poutres en semaine 4 $$U = \int_V u_0 \, dV$$
- de façon générale, u_0 est une forme d'énergie potentielle

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)$$

- Pour une poutre (longueur selon x), on peut simplifer:

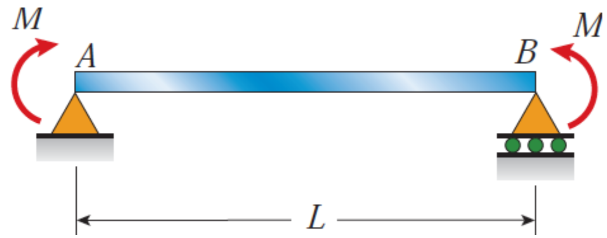
$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{yx}\gamma_{yx}\right) \approx \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} \equiv \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x$$

  - L'énergie de déformation due à la contrainte en cisaillement est plus petite d'un facteur $\left({}^{épaisseur}/_{longueur}\right)^2$ que l'énergie à la contrainte normale.
  - Nous négligeons donc généralement l'énergie de contrainte due à la contrainte en cisaillement.

Energie de déformation pour une poutre

- En flexion pure(M_0), monomatériau

$$U = \int_V u_0 \, dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x \, dV$$



$$\sigma_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0) \qquad \varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho} \qquad \rho = \frac{E}{M_z(x)} I_{z,y_0}$$

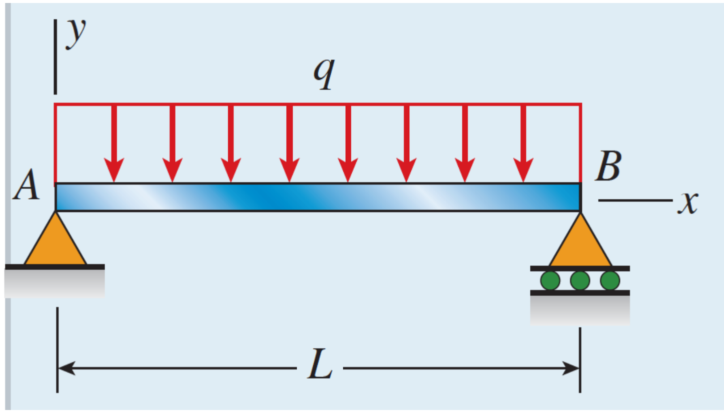
$$\mathrm{U} = \frac{1}{2} \int_V \frac{M_z(x)^2}{E I_{z,y_0}^2} (y - y_0)^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dy \, dz$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{E I_{z,y_0}} dx = \frac{1}{2} \int_0^L E I_{z,y_0} w''(x)^2 \, dx}$$

U toujours positif

Energie de déformation d'une poutre avec charge distribuée



- Option a) par le moment de flexion

$$M_z(x) = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$$

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z}\, dx = \frac{q^2 L^5}{240\, EI}$$

- Option b), par la déflection

$$w(x) = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) \text{ (tabelle)}$$

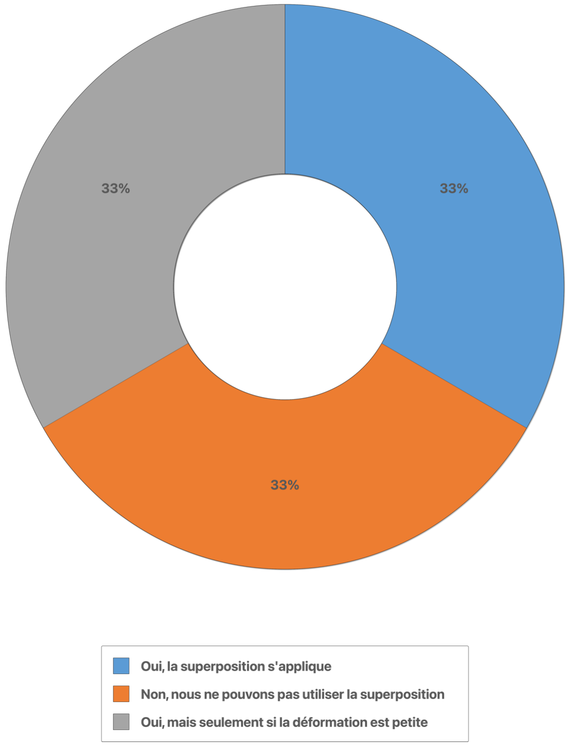
$$U = \int_0^L \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{q^2 L^5}{240\, EI}$$

Nous avons une poutre avec 2 charges, F_1 and F_2.

Pouvons-nous utiliser la superposition

$$U_{tot} = U_{F_1} + U_{F_2} \text{ ?}$$

A. Oui, la superposition s'applique
B. Non, nous ne pouvons pas utiliser la superposition
C. Oui, mais seulement si la déformation est petite



Pour une poutre avec 2 charges, F_1 and F_2.

Pouvons-nous utiliser:

$$U_{tot} = U_{F_1} + U_{F_2} \text{ ?}$$

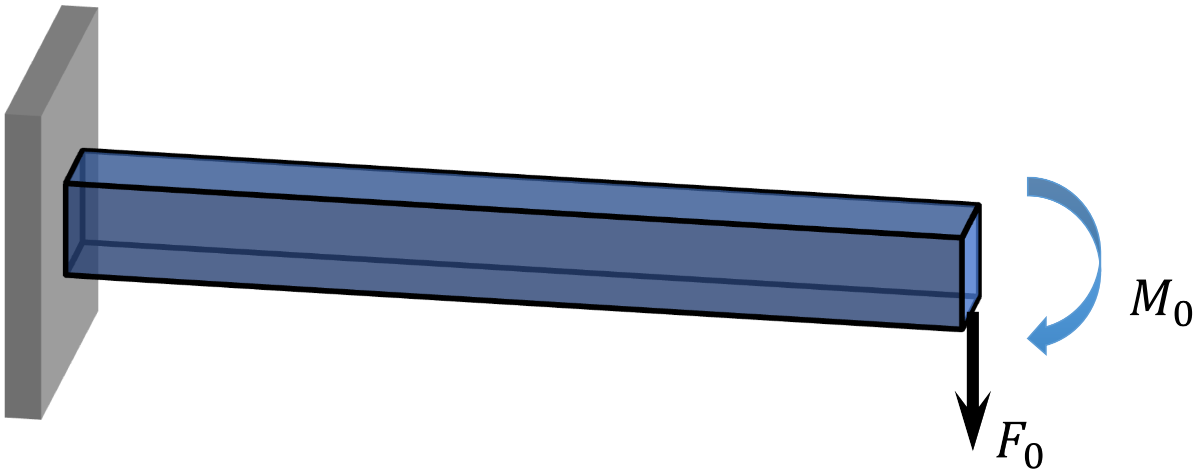
NON!

Nous ne pouvons pas utiliser le principe de superposition pour l'énergie, car l'énergie est l'intégrale du carré du moment interne.

quand un système n'est pas linéaire : pas de superposition !

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_z(x)^2}{EI_{z,y_0}} dx \quad = \frac{1}{2}\int_0^L EI_{z,y_0} w''(x)^2\, dx}$$

Exemple: poutre soumise à une force F_0 et un moment M_0

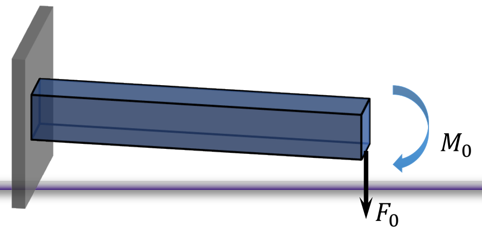


Calculons l'énergie de déformation de cette poutre de deux façons:

- méthode fausse: Calculer l'énergie associée au moment M_0, puis celle due à la force $F_{0,}$ et les sommer.

- méthode juste: Calculer l'énergie du à la combinaison du moment et de la force

Exemple



- Moment interne dû seulement au moment M_0

$$M_{M_0}(x) = -M_0$$

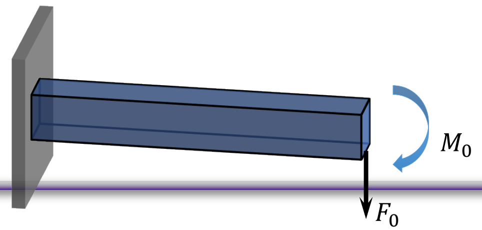
$$U_{M_0} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx = \frac{M_0^2}{2EI} L$$

- Moment interne dû seulement à la force F_0

$$M_{F_0}(x) = F_0(x - L)$$

$$U_{F_0} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx = \frac{F_0^2}{6EI} L^3$$

Exemple



- Moment interne du aux deux charges (F_0 et M_0) en même temps (OK de superposer Moments)

$$M_{interne}(x) = F_0(x - L) - M_0$$

$$U_{total} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx =$$

$$\frac{1}{2EI}\int_0^L (F_0(x - L) - M_0)^2\, dx = \frac{1}{2EI}\left(\frac{F_0^2 L^3}{3} + M_0^2 L + F_0 M_0 L^2\right)$$

$$U_{total} = U_{M_0} + U_{F_0} + \frac{F_0 M_0}{2EI} L^2$$

- **Nous ne pouvons pas utiliser le principe de superposition pour l'énergie,** car l'énergie est l'intégrale du carré du moment interne

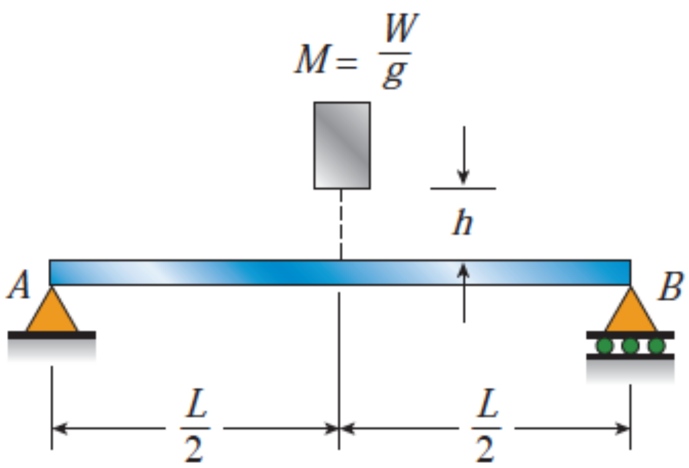
Déformations (élastiques) produites par **impact**

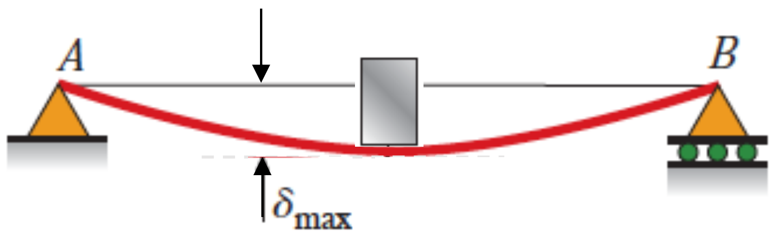
trouver la flèche max δ_{max}

- La flèche maximale causée par l'impact est calculée avec l’hypothèse que toute l'énergie potentielle de la masse qui frappe la poutre est transférée à la poutre (le bloc ne rebondit pas, mais se plaque à la poutre)

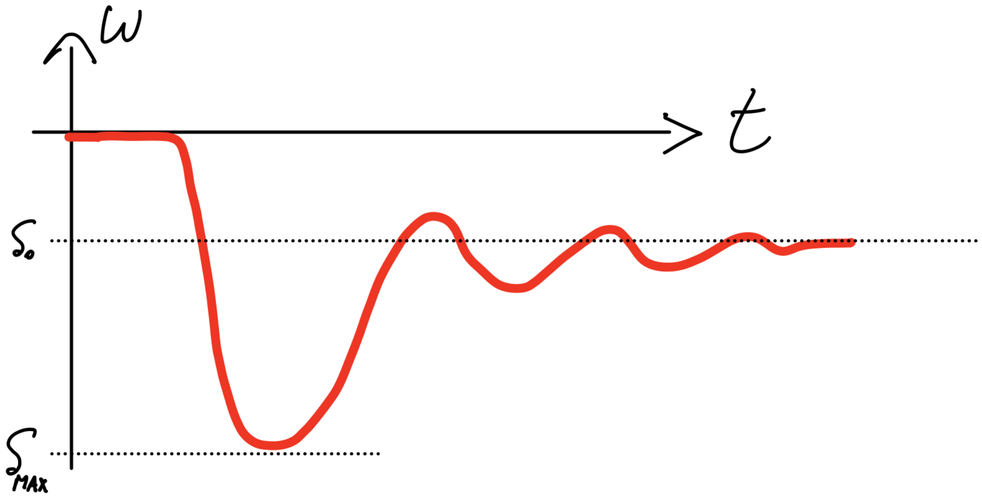
- donc utiliser la conservation d’énergie

$$Energie\ potentielle\ = Mg(h + \delta_{max})$$





- Après impact, la poutre se déforme à une flèche maximale $\delta_{max.}$ Puis oscille et éventuellement arrive à la position statique δ_0



δ_0 est la déflection statique du à la masse M (sans impact)

Déformations par impact

- énergie de déformation relative

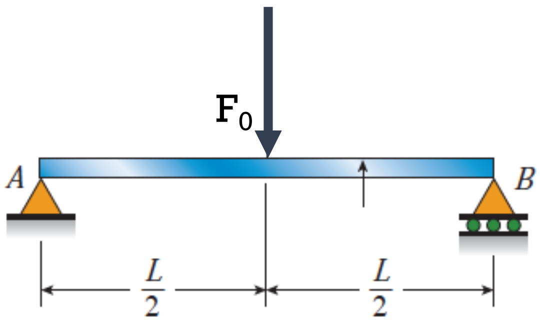
$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_z(x)^2}{EI_{z,y_0}}\,dx$$

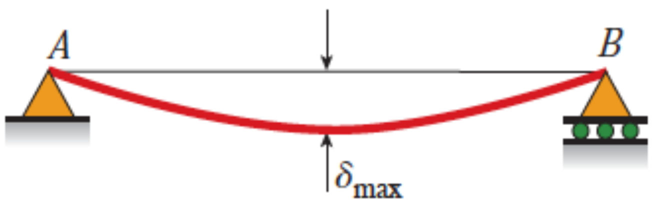
- Moment de flexion du à une charge ponctuelle F_0 au milieu de la poutre:

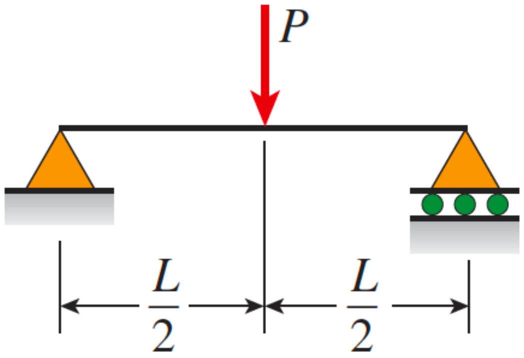
$$M_z(x) = \begin{cases} \frac{F_0}{2}x & x \le \frac{L}{2} \\ \frac{F_0}{2}(L-x) & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow U_{F_0} = 2\,\frac{F_0^2}{8EI_{z,y_0}}\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx = \frac{F_0^2}{12EI_{z,y_0}}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

On verra que $F_0 > Mg$







$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

Si on pose très doucement la masse
(déflection statique)

$$\delta_0 = \frac{Mg\,\mathrm{L}^3}{48\,EI}$$

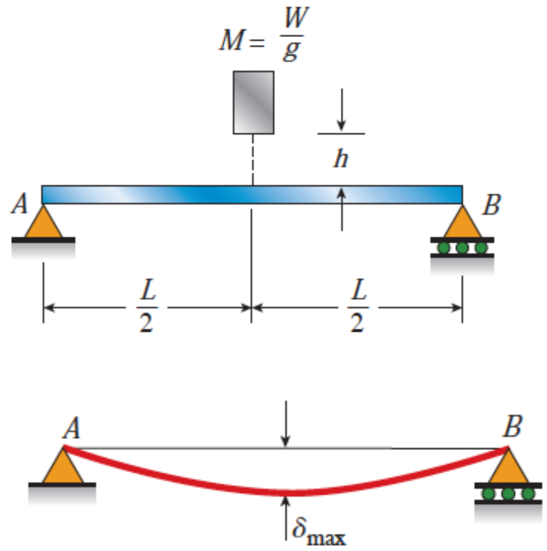
$$U_{F_0} = \frac{F_0^2}{12EI_{z,y_0}}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

Si on laisse tomber la masse

$$\delta_{max} = \frac{\mathrm{F_0L^3}}{48\,EI}$$

$$U_{F_0} = \frac{24\,EI}{L^3}\delta_{max}{}^2$$

Déflections par impact



- Conservation de l'énergie

$$U_0 = Mg(h + \delta_{max}) \qquad U_{F_0} = \frac{24EI_{z,y_0}}{L^3}\delta_{max}^2$$

$$U_0 = U_{F_0}$$

$$\rightarrow \delta_{max} = \frac{MgL^3}{48EI_{z,y_0}}\left(1 + \sqrt{1 + h\frac{96EI_{z,y_0}}{MgL^3}}\right)$$

$$\delta_{max} = \delta_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}}\right)$$

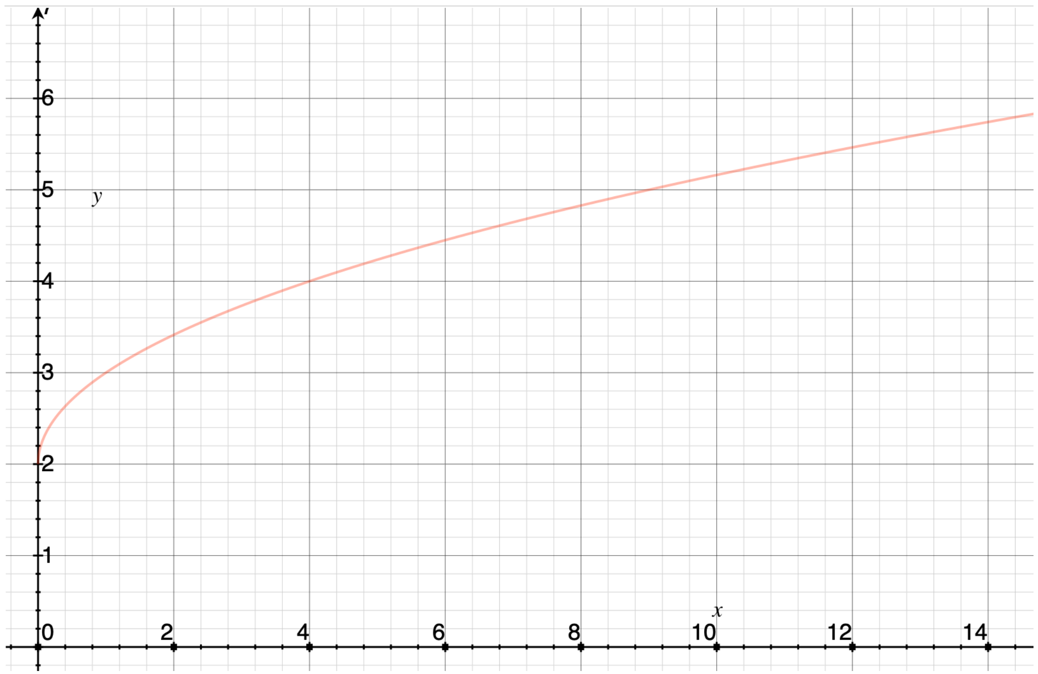
$$et\ donc\ F_0 = Mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}}\right)$$

$$\delta_{max} \geq 2\delta_0$$

δ_0 est la déflection statique due à la masse M (sans impact)

$$\frac{\delta_{max}}{\delta_0} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}}\right)$$

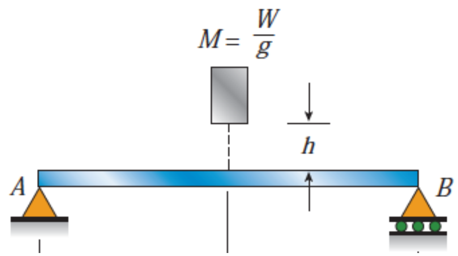
$\delta_{max}/\ \delta_0$



h/δ_0

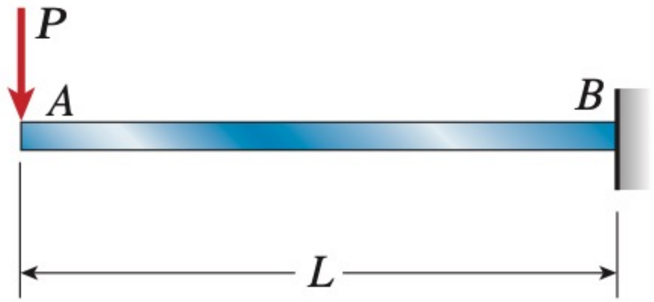
si $h >> \delta_0 \quad \delta_{max} = \sqrt{2h\delta_0}$

si h=0 $\quad \delta_{max} = 2\ \delta_0$



Intro 1 slide au théorème de de Castigliano

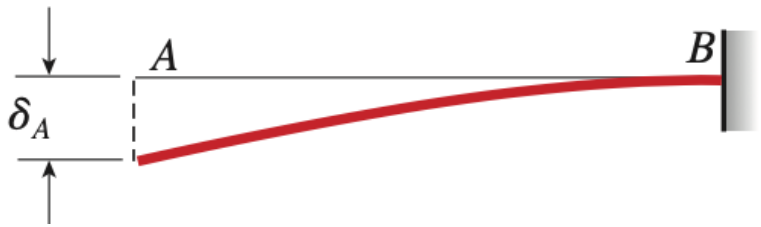
Le Th. de Castigliano permet de calculer la déflection à partir de l'énergie de déformation.



Par exemple, poutre avec force P à l'extrémité

$$U = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

Et $$\delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI}$$



On remarque que $\frac{dU}{dP} = \frac{PL^3}{3EI} = \delta_{max}$

La dérivé de l'énergie de déformation est la déflection du à cette charge

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$